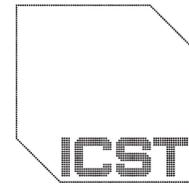


Diagrammatik der Tonhöhen - Von Boethius bis Newton

Daniel Muzzolini, Institut für Computermusik und Soundtechnologie, Zürcher Hochschule der Künste



Jahrestagung 2016
Universität Wien
9.-11. September 2016

Hintergrund

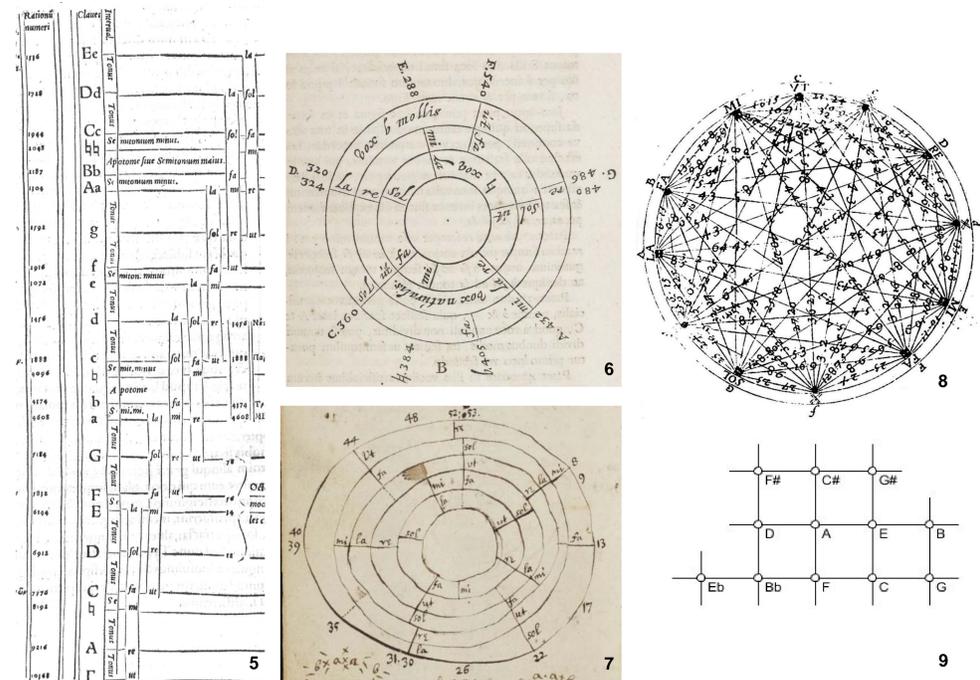
Nach der geläufigen Auffassung wurden Logarithmen im ausgehenden 16. Jahrhundert entwickelt. In der Musiklehre pythagoreischer Prägung hingegen ist logarithmisches Denken Standard. Ausdruck und Grundlage dieses Denkens ist die terminologische Unterscheidung von Zahlenverhältnissen und Intervallen. So bezeichnet "Sesquialtera" das Zahlenverhältnis 3 : 2, und "Diapente" gibt das zugehörige Intervall der Quinte an. Dabei entspricht der Addition von Intervallen die Multiplikation ihrer Zahlenverhältnisse. Der Abstandsbegriff für Tonhöhen, der sich in den Intervallen und der zugehörigen Sprache manifestiert, stellt ein logarithmisches Mass für Zahlenverhältnisse dar. Unsere Fähigkeit, gleiche Frequenzverhältnisse als identische Intervalle zu erkennen, ist ein Beispiel für das Weber-Fechner-Gesetz der Psychophysik. In der Musiktheorie hat diese Erkenntnis schon früh zu einem intuitiven Umgang mit Logarithmen geführt. Der Beitrag geht den damit verbundenen Visualisierungen von Boethius bis Newton nach.

Matrixdiagramme / Tongitter

In den arithmetischen Diagrammen von Boethius kommt das angesprochene logarithmische Verständnis visuell zum Ausdruck [1, 2]. Am Diagramm mit den Basiszahlen 8 und 9 lässt sich ablesen, dass sechs Ganztöne (9 : 8) um ein pythagoreisches Komma grösser als eine Oktave sind: Die Zahlen der Horizontalen (Latitudo) gehen durch Multiplikation mit 8, diejenigen der Diagonale (Angularis) durch Multiplikation mit 9 auseinander hervor. Dadurch ergibt sich für die Spalten die fortgesetzte Multiplikation mit 9/8. Die letzte Spalte enthält also die fortlaufende Proportion von sechs geschichteten Ganztönen. Derartige Tabellen können als diskrete Koordinatensysteme gedeutet werden, in welchen zu gleichen Vektoren gleiche musikalische Intervalle gehören. In dieser zweidimensionalen logarithmischen Anordnung entspricht die Multiplikation von Verhältnissen der Vektoraddition. Dieses Verständnis kommt in den gleichartigen Gitterdiagrammen von Johannes Torkesey (14. Jh.) und Robert Fludd (1618) zum Ausdruck [3], in denen vier verschiedene Richtungen mit ihren charakteristischen Verhältnissen beschriftet sind: Duplares (2:1), Triplares (3:1), Sesquialterae (3:2), Sesquiterciae (4:3).

Lineare und zyklische Tonhöhen

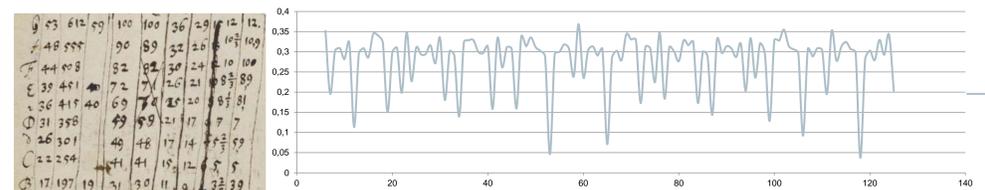
Unser Notensystem stellt eine halblogarithmische Umsetzung des Denkens in Intervallen dar, bei welcher gleiche Intervalle gleiche vertikale Abstände erhalten, aber gleiche Abstände nicht zwingend zu gleichen Intervallen gehören. Guido von Arezzos System von Hexachorden mit relativer Solmisation (ut-re-mi-fa-sol-la) erleichtert darin das intervallgetreue Transponieren von Melodien.



Die Darstellung des Systems der Hexachorde bei Glarean (1547) gibt die Grössenverhältnisse der Intervalle präzise wieder [5]. Descartes (1618) überträgt die Hexachorde in die syntonische Stimmung und bringt die Oktavidentität mit einer kreisförmigen Anordnung der Tonigkeiten zum Ausdruck [6]. In dieser Darstellung gehören zu gleichen Intervallen gleiche Winkel. Newton (1665) erweitert die drei Hexachorde von Descartes auf fünf quintverwandte diatonische Skalen [7]. Darüber hinaus unterlegt er dem syntonischen Tonsystem eine gleichmässige Unterteilung der Oktave in 53 Teile (53-tet).

Das Kreisdiagramm von Mersenne (1636) definiert eine 12-tönige chromatische Skala für das syntonische Tonsystem und ist gleichzeitig eine vollständige Intervallanalyse dieser Skala [8]. Darunter ist dieselbe Skala im Quint-Terzgeritter dargestellt [9].

Newtons Oktavteilungen



Newton hat verschiedene gleichmässige Unterteilungen der Oktave zur Approximation des syntonischen Tonsystems in Erwägung gezogen [10]. 53 gibt minimale Abweichungen für Werte kleiner als 118, wie die obige Grafik zeigt [11]. 59 eignet sich nur für die Darstellung der grossen Terz und kleinen Sexte. 612 ist eine optimale Wahl, die es erlaubt das pythagoräische vom syntonischen Komma zu unterscheiden.

Das Kreisdiagramm [12] zeigt die n-te Approximation der syntonisch diatonischen Skala (mit ambiger 2-Stufe) für n = 7, 12, 29, 31, 53, 59, 118. Der Unterschied zwischen 53 und 59 ist augenfällig und hörbar.

Schlussbemerkung

Die noch wenig erforschten Diagramme zu Intervallen, Skalen und Tonsystemen sind von einer faszinierenden Vielfalt, die hier nur ansatzweise zur Darstellung kommt.

Abbildungsnachweise

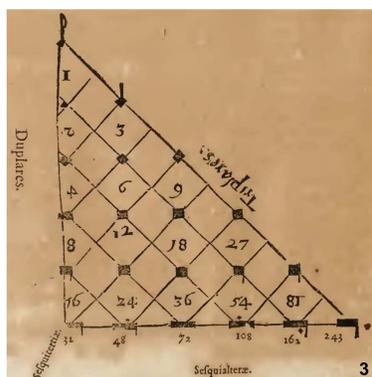
- Boethius, Anicius Manlius Severinus (10. Jh.). De institutione arithmetica. Medeltidshandskrift 1 (Mh 1), Lund University Library, fol. 4v
- Übertragung gemäss Boethius "De institutione musica" (spätes 10. Jh.), Staatsbibliothek Bamberg, Msc.Class.9, fol. 91r
- Fludd, Robert (1624). Ultriusque cosmologia, Vol I, Tract II, 1624 (first edition 1618), Part II, Lib. IV, 204
- Rameau, Jean-Philippe (1726). "Table des Progressions". Nouveau système de musique théorique, Paris 1726, 24
- Glareanus, Henricus Loriti (1547). Dodekachordon libri tres. Henricum Petri, Basileae 1547, Lib. I, 4/Lib. I, 25
- Descartes (1650). Musicae Compendium, Trajecti ad Rhenum, Typis Gisberti à Zijll, et Theodori ab Ackersdijk (Utrecht), 1650, 35
- Newton, Isaac (1664-1665). College Notebook (MS Add.4000), Cambridge University Library, 109v, 108r
- Mersenne, Marin (1636). Harmonie Universelle... Des Dissonances, p.136



Arithmetisches Diagramm von Boethius zur Berechnung geometrischer Zahlenfolgen mit dem Faktor 5/4.

1	8	64	512	4096	32'768	262'144
	9	72	576	4608	36'864	294'912
		81	648	5184	41'472	331'776
			729	5832	46'656	373'248
				6561	52'488	419'904
					59'049	472'392
						531'441

An der letzten Spalte dieses Diagramms zu den Basiszahlen 8 und 9 lässt sich ablesen, dass die Oktave grösser als sechs pythagoräische Ganztöne ist.



Die Beschriftung in der Gitterdarstellung von Robert Fludd bringt zum Ausdruck, dass verschiedene Richtungen verschiedene Intervalle definieren.

Table Des Progressions.

1 ^{re} Colonne	2 ^e Colonne	3 ^e Colonne	4 ^e Colonne	5 ^e Colonne	6 ^e Colonne	7 ^e Colonne	8 ^e Colonne
1	3	9	27	81	243	729	2187
1	5	25	125	625	3125	15625	78125
1	7	49	343	2401	16807	117649	823543
1	11	121	1331	14641	177156	1948717	21435888
1	13	169	2197	28561	371293	4826809	62297107
1	17	289	4913	83521	1419857	24137769	410338673
1	19	361	6859	130321	2470359	47049601	884801557
1	23	529	13667	310069	7143857	162921609	3748083187
1	25	625	15625	390625	9765625	244140625	6103515625
1	29	841	21953	644969	18884903	547662189	15880983481
1	31	961	29791	926181	28845016	894606001	27783196241
1	37	1369	47839	1771465	65753209	2430469729	89881380969
1	41	1681	68921	2864981	118318281	4851951641	198949117241
1	43	1849	79507	3433757	147005549	6321240609	27007090641
1	47	2209	103823	4900129	230107683	10817654641	50678117641
1	49	2401	117649	5832061	28840057	1430569609	70563016041
1	53	2809	148877	7896481	42073903	2239721641	118523216041
1	59	3481	205379	12167161	71639089	4225000001	25000000001
1	61	3721	226981	13841281	81550169	5013006401	30630064001
1	67	4489	282473	19000029	12852361	864000001	5800000001
1	71	5041	317651	22770121	16384081	1176490001	8400000001
1	73	5329	346387	25511369	18713961	1373240001	10000000001
1	79	6241	409643	32817941	26000001	1900000001	14000000001
1	83	6889	459897	38799841	32000001	2400000001	18000000001
1	89	7921	542943	48000001	40000001	3000000001	22000000001
1	91	8281	573497	51000001	45000001	3300000001	24000000001
1	97	9409	663517	60000001	55000001	4000000001	28000000001
1	101	10201	717043	65000001	60000001	4500000001	30000000001
1	103	10609	751417	69000001	65000001	4800000001	32000000001
1	107	11449	812867	76000001	72000001	5400000001	36000000001
1	109	11881	846487	80000001	77000001	5800000001	38000000001
1	113	12769	912643	87000001	84000001	6400000001	42000000001
1	117	13681	982047	94000001	91000001	7000000001	46000000001
1	119	14161	1023617	98000001	96000001	7400000001	48000000001
1	121	14641	1067443	102000001	101000001	7800000001	50000000001
1	127	16129	1185987	112000001	112000001	8600000001	56000000001
1	131	17161	1266517	119000001	120000001	9100000001	60000000001
1	133	17761	1316647	124000001	126000001	9600000001	64000000001
1	137	18769	1399843	132000001	134000001	10300000001	70000000001
1	141	19841	1486847	140000001	143000001	11000000001	76000000001
1	143	20449	1538443	146000001	149000001	11600000001	80000000001
1	149	22201	1677243	158000001	161000001	12800000001	90000000001
1	151	22801	1730043	164000001	167000001	13400000001	96000000001
1	157	24649	1888843	178000001	182000001	14800000001	108000000001
1	161	25921	2000043	188000001	193000001	15800000001	118000000001
1	163	26569	2063243	194000001	199000001	16400000001	124000000001
1	167	28081	2212043	208000001	214000001	17600000001	138000000001
1	171	29161	2316843	219000001	225000001	18700000001	148000000001
1	173	29761	2370043	225000001	231000001	19300000001	154000000001
1	179	32041	2565243	242000001	248000001	21000000001	170000000001
1	181	32641	2618443	248000001	254000001	21600000001	176000000001
1	187	34729	2832043	268000001	275000001	23800000001	198000000001
1	191	36481	2996843	286000001	293000001	26000000001	220000000001
1	193	37081	3050043	292000001	299000001	26600000001	226000000001
1	199	39681	3328043	316000001	325000001	30000000001	250000000001
1	201	40281	3381243	322000001	331000001	30600000001	256000000001
1	207	42841	3672043	348000001	358000001	34000000001	290000000001
1	211	44521	3888843	370000001	381000001	37000000001	320000000001
1	213	45121	3942043	376000001	387000001	37600000001	326000000001
1	219	47729	4240043	402000001	414000001	41000000001	350000000001
1	221	48329	4293243	408000001	420000001	41600000001	356000000001
1	227	51449	4648043	438000001	450000001	45000000001	390000000001
1	231	53441	4900843	462000001	474000001	48000000001	420000000001
1	233	54041	4954043	468000001	480000001	48600000001	426000000001
1	239	57289	5308843	502000001	514000001	52000000001	460000000001
1	241	57889	5362043	508000001	520000001	52600000001	466000000001
1	247	61129	5726843	542000001	554000001	56000000001	500000000001
1	251	63121	5989643	566000001	578000001	58400000001	524000000001
1	253	63721	6042843	572000001	584000001	59000000001	530000000001
1	259	66969	6407643	606000001	618000001	62400000001	564000000001
1	261	67569	6460843	612000001	624000001	63000000001	570000000001
1	267	70809	6825643	646000001	658000001	66400000001	604000000001
1	271	72801	7088443	670000001	682000001	68800000001	628000000001
1	273	73401	7141643	676000001	688000001	69400000001	634000000001
1	279	76649	7506443	710000001	722000001	72800000001	668000000001
1	281	77249	7559643	716000001	728000001	73400000001	674000000001
1	287	80489	7924443	750000001	762000001	76800000001	708000000001
1	291	82481	8177243	774000001	786000001	79200000001	732000000001
1	293	83081	8230443	780000001	792000001	79800000001	738000000001
1	299	86329	8585243	814000001	826000001	83200000001	772000000001
1	301	86929	8638443	820000001	832000001	83800000001	778000000001
1	307	90169	9003243	854000001	866000001	87200000001	812000000001
1	311	92161	9256043	878000001	890000001	89800000001	836000000001
1	313	92761	9309243	884000001			