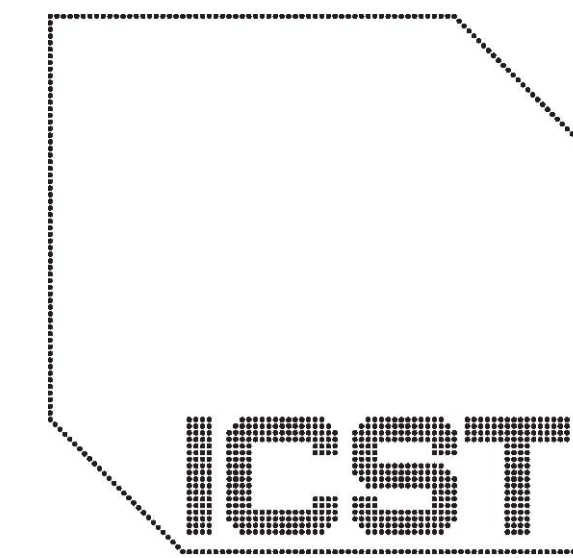


Diagrammatik der Tonhöhen - Von Boethius bis Newton

Daniel Muzzolini, Institut für Computermusik und Soundtechnologie, Zürcher Hochschule der Künste



Jahrestagung 2016
Universität Wien
9.-11. September 2016

Hintergrund

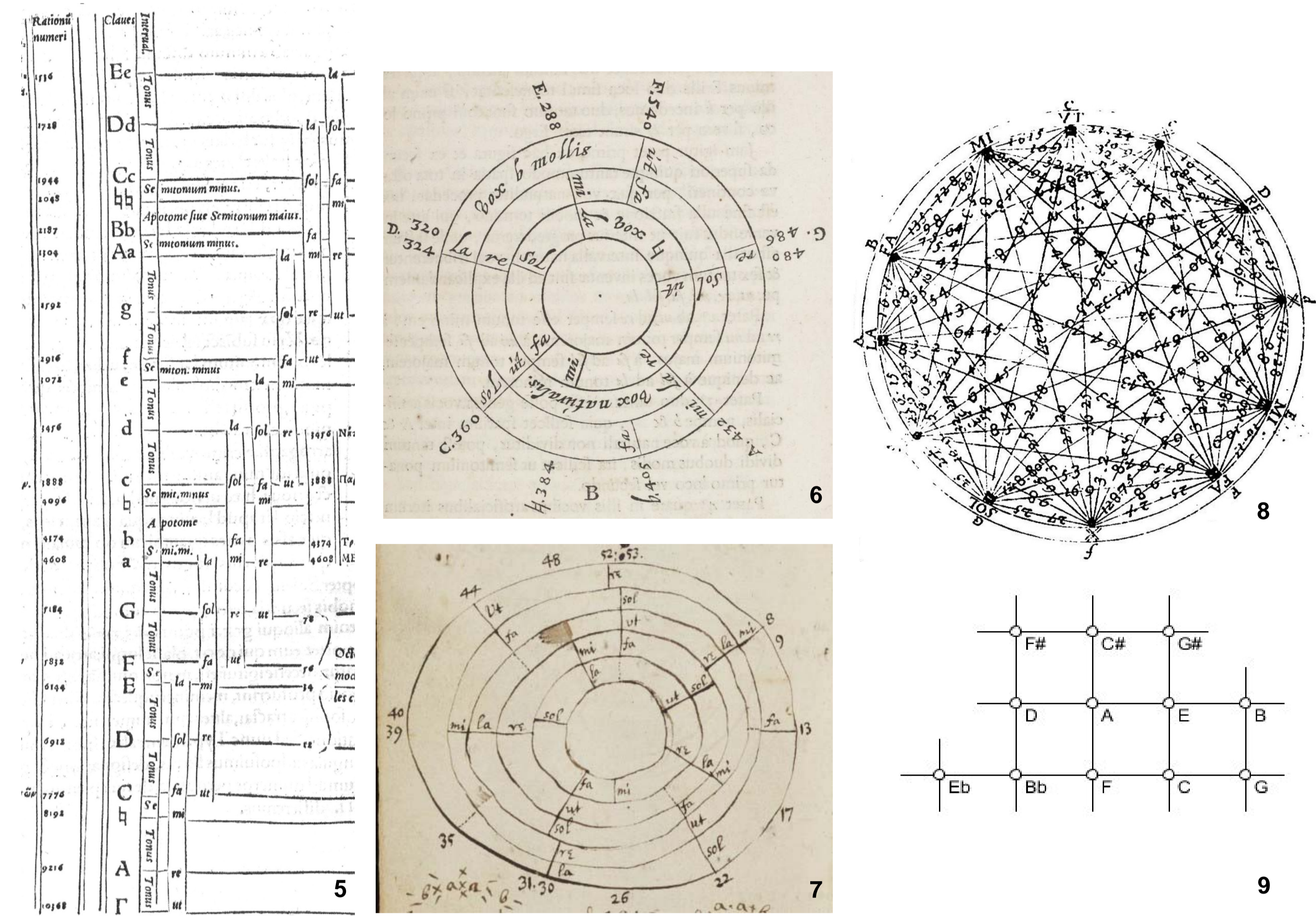
Nach der geläufigen Auffassung wurden Logarithmen im ausgehenden 16. Jahrhundert entwickelt. In der Musiklehre pythagoreischer Prägung hingegen ist logarithmisches Denken Standard. Ausdruck und Grundlage dieses Denkens ist die terminologische Unterscheidung von Zahlenverhältnissen und Intervallen. So bezeichnet "Sesquialtera" das Zahlenverhältnis 3 : 2, und "Diapente" gibt das zugehörige Intervall der Quinte an. Dabei entspricht der Addition von Intervallen die Multiplikation ihrer Zahlenverhältnisse. Der Abstandsbegriff für Tonhöhen, der sich in den Intervallen und der zugehörigen Sprache manifestiert, stellt ein logarithmisches Mass für Zahlenverhältnisse dar. Unsere Fähigkeit, gleiche Frequenzverhältnisse als identische Intervalle zu erkennen, ist ein Beispiel für das Weber-Fechner-Gesetz der Psychophysik. In der Musiktheorie hat diese Erkenntnis schon früh zu einem intuitiven Umgang mit Logarithmen geführt. Der Beitrag geht den damit verbundenen Visualisierungen von Boethius bis Newton nach.

Matrixdiagramme / Tongitter

In den arithmetischen Diagrammen von Boethius kommt das angesprochene logarithmische Verständnis visuell zum Ausdruck [1, 2]. Am Diagramm mit den Basiszahlen 8 und 9 lässt sich ablesen, dass sechs Ganztöne (9 : 8) um ein pythagoreisches Komma grösser als eine Oktave sind: Die Zahlen der Horizontalen (Latitudo) gehen durch Multiplikation mit 8, diejenigen der Diagonale (Angularis) durch Multiplikation mit 9 auseinander hervor. Dadurch ergibt sich für die Spalten die fortgesetzte Multiplikation mit 9/8. Die letzte Spalte enthält also die fortlaufende Proportion von sechs geschichteten Ganztönen. Derartige Tabellen können als diskrete Koordinatensysteme gedeutet werden, in welchen zu gleichen Vektoren gleiche musikalische Intervalle gehören. In dieser zweidimensionalen logarithmischen Anordnung entspricht die Multiplikation von Verhältnissen der Vektoraddition. Dieses Verständnis kommt in den gleichartigen Gitterdiagrammen von Johannes Torkesey (14. Jh.) und Robert Fludd (1618) zum Ausdruck [3], in denen vier verschiedene Richtungen mit ihren charakteristischen Verhältnissen beschriftet sind: Duplares (2:1), Triplares (3:1), Sesquialterae (3:2), Sesquiterciae (4:3).

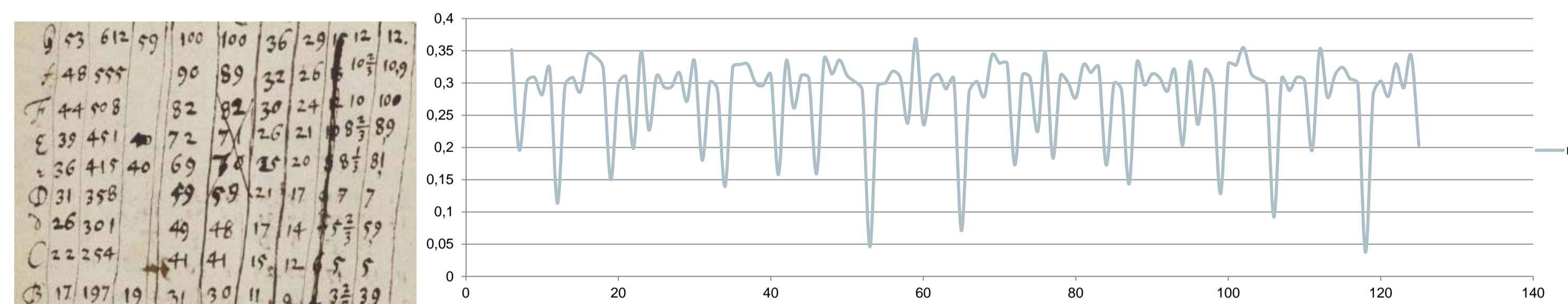
Lineare und zyklische Tonhöhen

Unser Notensystem stellt eine halblogarithmische Umsetzung des Denkens in Intervallen dar, bei welcher gleiche Intervalle gleiche vertikale Abstände erhalten, aber gleiche Abstände nicht zwingend zu gleichen Intervallen gehören. Guido von Arezzos System von Hexachorden mit relativer Solmisation (ut-re-mi-fa-sol-la) erleichtert darin das intervallgetreue Transponieren von Melodien.



Die Darstellung des Systems der Hexachorde bei Glarean (1547) gibt die Grössenverhältnisse der Intervalle präzise wieder [5]. Descartes (1618) überträgt die Hexachorde in die syntonische Stimmung und bringt die Oktavidentität mit einer kreisförmigen Anordnung der Tonigkeiten zum Ausdruck [6]. In dieser Darstellung gehören zu gleichen Intervallen gleiche Winkel. Newton (1665) erweitert die drei Hexachorde von Descartes auf fünf quintverwandte diatonische Skalen [7]. Darüber hinaus unterlegt er dem syntonischen Tonsystem eine gleichmässige Unterteilung der Oktave in 53 Teile (53-tet). Das Kreisdiagramm von Mersenne (1636) definiert eine 12-tönige chromatische Skala für das syntonische Tonsystem und ist gleichzeitig eine vollständige Intervallanalyse dieser Skala [8]. Darunter ist dieselbe Skala im Quint-Terzgitter dargestellt [9].

Newtons Oktavteilungen



Newton hat verschiedene gleichmässige Unterteilungen der Oktave zur Approximation des syntonischen Tonsystems in Erwägung gezogen [10]. 53 gibt minimale Abweichungen für Werte kleiner als 118, wie die obige Grafik zeigt [11]. 59 eignet sich nur für die Darstellung der grossen Terz und kleinen Sexte. 612 ist eine optimale Wahl, die es erlaubt das pythagoräische vom syntonischen Komma zu unterscheiden.

Das Kreisdiagramm [12] zeigt die n-te Approximation der syntonisch diatonischen Skala (mit ambiger 2-Stufe) für n = 7, 12, 29, 31, 53, 59, 118. Der Unterschied zwischen 53 und 59 ist augenfällig und hörbar.

Schlussbemerkung

Die noch wenig erforschten Diagramme zu Intervallen, Skalen und Tonsystemen sind von einer faszinierenden Vielfalt, die hier nur ansatzweise zur Darstellung kommt.

Abbildungsnachweise

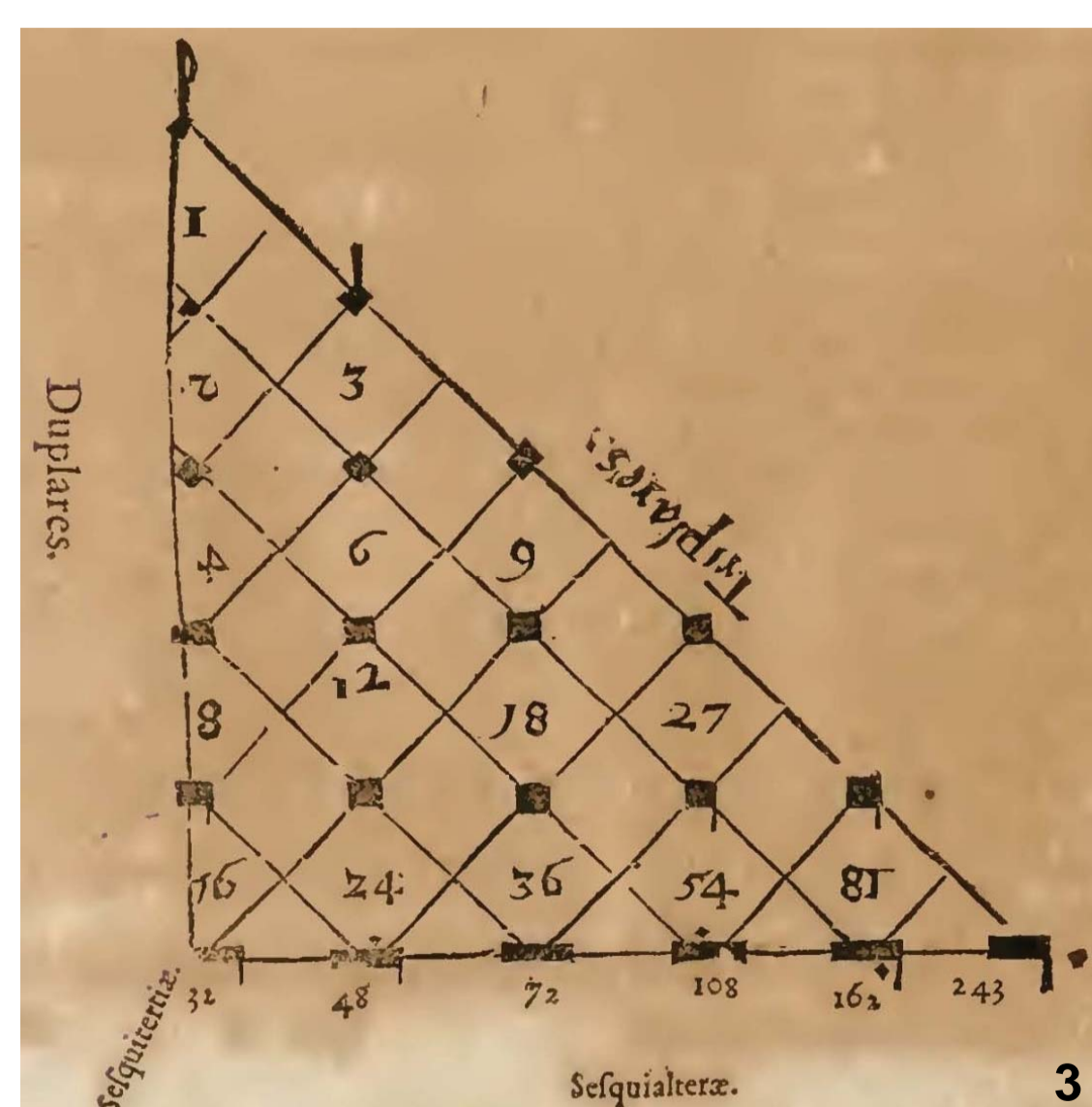
- Boethius, Anicius Manlius Severinus (10. Jh.). De institutione arithmetica. Medeltidshandskrift 1 (Mh 1), Lund University Library, fol. 4v
- Übertragung gemäss Boethius "De institutione musica" (spätes 10. Jh.), Staatsbibliothek Bamberg, Msc.Class.9, fol. 91r
- Fludd, Robert (1624). Ultriusque cosmographia, Vol I, Tract II, 1624 (first edition 1618), Part II, Lib. IV, 204
- Rameau, Jean-Philippe (1726). "Table des Progressions". Nouveau système de musique théorique, Paris 1726, 24
- Glareanus, Henricus Loriti (1547). Dodekachordon libri tres. Henricum Petri, Basileae 1547, Lib. I, 4/Lib. I, 25
- Descartes (1650). Musicae Compendium, Trajecti ad Rhenum, Typis Gisberti à Zijll, et Theodori ab Ackersdijk (Utrecht), 1650, 35
- Newton, Isaac (1664-1665). College Notebook (MS Add.4000), Cambridge University Library, 109v, 108r
- Mersenne, Marin (1636). Harmonie Universelle... Des Dissonances, p.136



Arithmetisches Diagramm von Boethius zur Berechnung geometrischer Zahlenfolgen mit dem Faktor 5/4.

1	8	64	512	4096	32'768	262'144
	9	72	576	4608	36'864	294'912
		81	648	5184	41'472	331'776
			729	5832	46'656	373'248
				6561	52'488	419'904
					59'049	472'392
						531'441

An der letzten Spalte dieses Diagramms zu den Basiszahlen 8 und 9 lässt sich ablesen, dass die Oktave grösser als sechs pythagoräische Ganztöne ist.



Die Beschriftung in der Gitterdarstellung von Robert Fludd bringt zum Ausdruck, dass verschiedene Richtungen verschiedene Intervalle definieren.

Table Des Progressions.

1 ^{re} Colonne	2 ^e Colonne	3 ^e Colonne	4 ^e Colonne	5 ^e Colonne	6 ^e Colonne	7 ^e Colonne	8 ^e Colonne
1	3	9	27	81	243	729	2187
1	5	25	125	625	3125	15625	78125
1	7	49	343	2401	16807	117649	823543
1	11	121	1331	14641	177156	2170859	26826257
1	13	169	2197	28561	371293	4826809	62543437
1	17	289	4913	83521	1419857	24137769	411448753
1	19	361	6859	130321	2476099	47163881	896854719
1	23	529	13667	310069	7143953	162921309	3748869517
1	25	625	15625	390625	9765625	244140625	6103515625
1	29	841	21953	645817	1886689	54700041	158420317
1	31	961	29791	926185	28845037	894606153	2772779077
1	37	1369	47839	1771365	65751517	2430406131	8998202981
1	41	1681	68921	2864985	118668417	4869411093	20066700577
1	43	1849	79507	3401205	147000617	6240026153	26850110057
1	47	2209	103823	4900005	230101217	10817570153	50907000577
1	49	2401	117649	5783425	282429517	13841280153	67297300577
1	53	2809	141881	7000005	371716517	19600000153	93000000577
1	59	3481	172059	9126705	538580517	31770000153	147000000577
1	61	3721	185191	9938105	606000517	36000000153	166000000577
1	67	4489	226687	11164905	750000517	50000000153	220000000577
1	69	4761	241373	12167005	800000517	54000000153	240000000577
1	71	5041	257407	13069405	850000517	58000000153	260000000577
1	73	5329	274867	14024005	900000517	62000000153	280000000577
1	77	5929	302539	15190005	990000517	68000000153	300000000577
1	79	6241	320639	16384905	1060000517	73000000153	320000000577
1	83	6889	351317	17850005	1160000517	80000000153	340000000577
1	85	7225	367505	18608005	1220000517	84000000153	360000000577
1	89	7921	401017	20371005	1340000517	92000000153	380000000577
1	91	8281	419881	21254005	1400000517	96000000153	400000000577
1	95	9025	451987	23204005	1540000517	10600000153	440000000577
1	97	9409	468673	24164005	1600000517	11000000153	460000000577
1	101	10201	501217	26264005	1760000517	12200000153	500000000577
1	103	10609	519667	27244005	1820000517	12600000153	520000000577
1	107	11449	554487	29524005	1980000517	13800000153	560000000577
1	109	11881	574687	30524005	2040000517	14200000153	580000000577
1	113	12769	612687	32964005	2220000517	15600000153	620000000577
1	115	13225	635687	34044005	2280000517	16000000153	640000000577
1	119	14161	676687	36604005	2480000517	17600000153	680000000577
1	121	14641	699687	37804005	2540000517	18000000153	700000000577
1	125	15625	740687	40484005	2760000517	19600000153	740000000577
1	127	16129	759687	41564005	2820000517	20000000153	760000000577
1	131	17161	804687	44324005	3040000517	21600000153	800000000577
1	133	17721	823687	45404005	3100000517	22000000153	820000000577
1	137	18761	870687	48284005	3320000517	23600000153	860000000577
1	139	19281	889687	49364005	3380000517	24000000153	880000000577
1	143	20321	938687	52244005	3600000517	25600000153	920000000577
1	145	20881	957687	53324005	3660000517	26000000153	940000000577
1	149	21921	1006687	56204005	3880000517	27600000153	980000000577
1	151	22481	1025687	57284005	3940000517	28000000153	100000000577
1	155	23521	1074687	60164005	4160000517	29600000153	104000000577
1	157	24081	1093687	61244005	4220000517	30000000153	106000000577
1	161	25121	1142687	64124005	4440000517	31600000153	110000000577
1	163	25681	1161687	65204005	4500000517	32000000153	112000000577
1	167	26721	1210687	68084005	4720000517	33600000153	116000000577
1	169	27281	1229687	69164005	4780000517	34000000153	118000000577
1	173	28321	1278687	72044005	5000000517	35600000153	122000000577
1	175	28881	1297687	73124005	5060000517	36000000153	124000000577
1	179	29921	1346687	76004005	5280000517	37600000153	128000000577
1	181	30481	1365687	77084005	5340000517	38000000153	130000000577
1	185	31521	1414687	80004005	5560000517	39600000153	134000000577
1	187	32081	1433687	81084005	5620000517	40000000153	136000000577
1	191	33121	1482687	83964005	5840000517	41600000153	140000000577
1	193	33681	1501687	85044005	5900000517	42000000153	142000000577
1	197	34721	1550687	87924005	6120000517	43600000153	146000000577
1	199	35281	1569687	89004005	6180000517	44000000153	148000000577
1	203	36321	1618687	91884005	6400000517	45600000153	152000000577
1	205	36881	1637687	92964005	6460000517	46000000153	154000000577
1	209	37921	1686687	95844005	6680000517	47600000153	158000000577
1	211	38481	1705687	96924005	6740000517	48000000153	160000000577
1	215	39521	1754687	99804005	6960000517	49600000153	164000000577
1	217	40081	1773687	100884005	7020000517	50000000153	166000000577
1	221	41121	1822687	103804005	7240000517	51600000153	170000000577
1	223	41681	1841687	104884005	7300000517	52000000153	172000000577
1	227	42721	1890687	107804005	7520000517	53600000153	176000000577
1	229	43281	1909687	108884005	7580000517	54000000153	178000000577
1	233	44321	1958687	111804005	7800000517	55600000153	182000000577
1	235	44881	1977687	112884005	7860000517	56000000153	184000000577
1	239	45921	2026687	115804005	8080000517	57600000153	188000000577
1	241	46481	2045687	116884005	8140000517	58000000153	190000000577
1	245	47521	2094687	119804005	8360000517	59600000153	194000000577
1	247	48081	2113687	120884005	8420000517	60000000153	196000000577
1	251	49121	2162687	123804005	8640000517	61600000153	200000000577
1	253	49681	2181687	124884005	8700000517	62000000153	202000000577
1	257						